Exercice 1 :

1) Montrer que l'équation $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$ admet une solution imaginaire pure notée Z_A, que l'on déterminera.

2) Déterminer les autres racines Z_B et Z_C (Z_B étant la racine ayant une partie imaginaire positive).

3) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

On note A,B et C les points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C .

a) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera.
b) Montrer que OABC est un losange.

Exercice 2 :

Soient z un nombre complexe différent de 1, Z= $\frac{z+i}{z-1}$.

On désigne par M le point d'affixe z.

1) On pose z=x+i y ; déterminer la forme algébrique de Z.

2) Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que Z soit un imaginaire pur.

3) Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que Z soit réel.

4) Déterminer l'ensemble Δ' des points M tels que |Z | =1.

Exercice 3 :

Soient z = $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et z'=2+2 i.

1) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes z et z'.

2) Soit Z= $\frac{Z}{Z'}$.

a) Donner la forme algébrique de Z.
b) Donner la forme trigonométrique de Z.

3) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4 :

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N $(O,\vec{u},\vec{v})$. , on donne les points A B et C d'affixes respectives $z_A = -2$; $z_B = -3i$ et $z_C = 1+2i$.

1/ a) Placer les points A, B et C.
b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
c) Déterminer l'affixe du point D pour que ABDC soit un carré.

2/ a) Vérifier $(5+2i)^2 = -24+10i$.
b) Résoudre dans C, l'équation $z^2 + (i-1)z + 6 - 3i = 0$.

3/ Soit f l'application de C dans lui même définie par :

$$f(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i$$

a) Calculer f (–2).
b) Montrer qu'il existe trois nombres complexes a, b et c tels que :
pour tout nombre complexe z ; on a f (z) = (z+2) (az^2 +bz +c)
c – Résoudre, alors, dans C, l'équation f(z) = 0.

Exercice 5 :

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N $(O,\vec{u},\vec{v})$., on donne les points A , B ,C et I d'affixes respectives $z_A = -2i$; $z_B = 1+ i$,
$Z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$.

1)a)Placer sur une figure les points A, B, C et I.
b) Montrer que I est le milieu du segment [AC].
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Soit D Le symétrique de B par rapport à I.
a)Déterminer z_D.
b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 6 :

On donne les nombres complexes suivants :

$z= 2j=-1+i\sqrt{3}$ $z'= i+\sqrt{3}$.

1-Donner la forme exponentielle de z et z'.

2-En déduire la forme exponentielle de Z=z.z' et Z'= $\frac{z^2}{z'^3}$.

3- En déduire que $\frac{Z}{Z'}$=8.

Exercice 7 :

1)a) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $3(1+i)^2$.
b. Résoudre, dans, $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 -(1-i)z-2i=0$.
On désigne par z_1 et z_2 les solutions de l'équation précédente, z_1 étant celle qui a une partie réelle négative.
2)a) Pour tour z de $\mathbb{C}$, développer l'expression : $(z+1-i)(z^2-(1-i)z-2i)$.
b. En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $z^3 = 2+2i$.

3 On pose $z_0 = -1+i$ et $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Vérifier que les solutions de l'équation (E) sont z_0 , jz_0 et $j^2 z_0$.
b) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_0 et j.
c) En déduire la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

Exercice 8:

1) Résoudre, dans IR^3, le système :(S) $\begin{cases} 4a - 2b + c = 4 \\ a + b + c = 13 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$

2) Soit a,b et c des réels et f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3+az^2+bz+c$$

a)-Déterminer les réels a,b et c pour que l'on ait : $\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = 14 \\ f(-2) = -4 \end{cases}$

b) Vérifier que l'on a : $f(z)= (z+1)(z^2+2z+4)$.

3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(z+1)(z^2+2z+4)=0$.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A,B et C d'affixes respectives : $z_A = -1$; $z_B = -1+i\sqrt{3}$ *et* $z_C = -1-i\sqrt{3}$.

a)-Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_B *et* z_C.

b)-Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C.

c)-Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 9:

On donne :z_0=-3+3i.

1-a-Ecrire z_0 sous forme trigonométrique.

b- Montre que : $z_0^n + \overline{z_0}^n = 3^n \times 2^{1+\frac{n}{2}} \cos\frac{3n\pi}{4}$.

2) On pose u = $(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.

a) Montre que : $u = \frac{2}{3} z_0 e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

b) En déduire la forme trigonométrique de u.

c) En déduire la valeur exacte de $tg\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 10:

1)a) Calculer le module et un argument de u = $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Vérifier que $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^2$ = u.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) :2z²-(7+i$\sqrt{3}$) +2 (3+i$\sqrt{3}$)=0.

a- Vérifier que le discriminant Δ =-4u.

b- Résoudre, alors, dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).($z_1$et z_2 sont les racines de (E) tels que : $|z_1|>|z_2|$.)

c- Vérifier que z_2-1=u (z_1-1).

d- Soient A, B et C les points images de 1, $z_1$et z_2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 11:

On considère dans C l'équation (E) :

$z^3 – (21- i) z^2 + (146 – 2i) z – 336 – 48i = 0$

1/ Résoudre (E) sachant qu'elle admet une racine réelle.

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A = -6i, z_B = 8, z_c = 9 – 3i et z_D= 4+ 2i

a) placer ces points.

b) Déterminer la forme exponentielle des nombres : $\frac{z_D - z_A}{z_c - z_A}$ *et* $\frac{z_D - z_B}{z_c - z_B}$

c) En déduire que A, B, C et D sont situés sur un même cercle C.

Construire son centre Ω puis construire C.

3/ Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\Pi}{2}$.

a) montrer que R (C) = D

b) Déterminer l'expression complexe de R.

c) En déduire l'affixe de Ω puis le rayon de C.

Exercice 12:

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1)a) Déterminer la forme complexe de la similitude directe S vérifiant : S (A) = O et S (B) = B' avec A (i), B ($\sqrt{3}$) et B' (-4i).

b) Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.

2) Déterminer alors l'ensemble $C = \left\{ M(Z), tel\ que : \left| (1-i\sqrt{3})Z - \sqrt{3} - i \right| = 4 \right\}$

Exercice 13:

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N $(O,\vec{u},\vec{v})$., on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3+ 3i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

1)a) Calculer le module et un argument de z_A et z_B.

b) Placer les points A et B.

c) Soient les points I et C d'affixes respectives $\frac{7}{4}$ et $\frac{i\sqrt{30}}{2}$.

Montrer que A ; B et C appartiennent à un même cercle de centre I et de rayon qu'on calculera.

1) On considère le nombre complexe Z = $\frac{3+3i}{-1+i\sqrt{3}}$

a) Ecrire Z sous la forme algébrique.

b) Ecrire Z sous la forme trigonométrique.

c) En déduire la valeur exacte de cos ($-\frac{5\pi}{12}$) et sin ($-\frac{5\pi}{12}$)